جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
دوازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۳

سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
تعداد سوالات		
–	۶	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

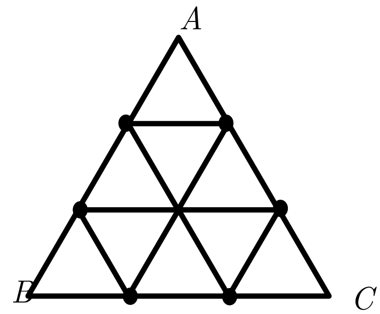
- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی

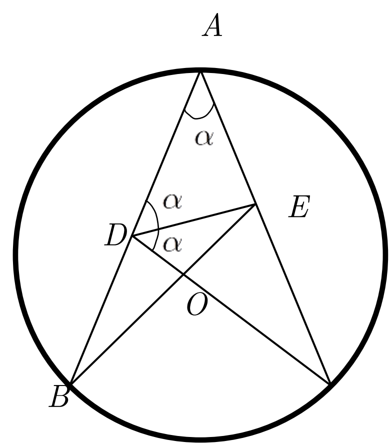
دانش‌آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۷۳

۱- در مثلث دلخواه ABC هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم $(n \geq ۲)$. از هر نقطه تقسیم روی هر ضلع، خطوطی به‌موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. مثلاً برای $n = ۳$ شکل زیر حاصل می‌شود.

برای هر $n \geq ۲$ تعداد متوازی‌الاضلاع‌های به وجود آمده را مشخص کنید.



۲- در شکل نقطه‌ی O مرکز دایره است. زاویه‌ی α چند درجه است؟



۳- $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح و $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویاست. تمام توابع $f : \mathbb{Z} - \{۰\} \to \mathbb{Q}$ را طوری پیدا کنید که در معادله‌ی تابعی زیر صدق کنند.

$$f\left(\frac{x+y}{۳}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{۲}$$

۴- اگر $\overline{a_۱ \ldots a_n}$ یک عدد n رقمی‌باشد ثابت کنید تابعی یک‌به‌یک مانند $f : \{۰, ۱, \ldots, ۹\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(a_۱) \neq ۰$ و $\overline{f(a_۱) \ldots f(a_n)}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۵- فرض کنید در مثلث ABC نقاط M، N و P به ترتیب نقاط تماس دایره‌ی محاطی داخلی ABC با اضلاع AB، AC و BC باشند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث MNP، مرکز دایره‌ی محیطی [مثلث ABC] و مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

۶- اگر $n > ۳$ فرد باشیم $n = \prod_{i=۱}^{k} p_i^{\alpha_i}$ (p_i ها اعداد اول [هستند]) و

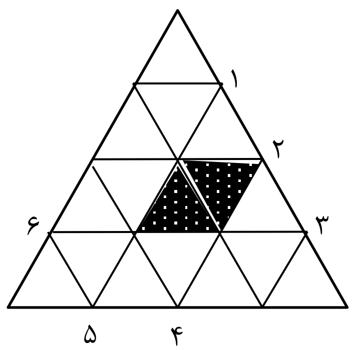
$$m = n\left(۱ - \frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱ - \frac{۱}{p_۲}\right)\dots\left(۱ - \frac{۱}{p_k}\right)$$

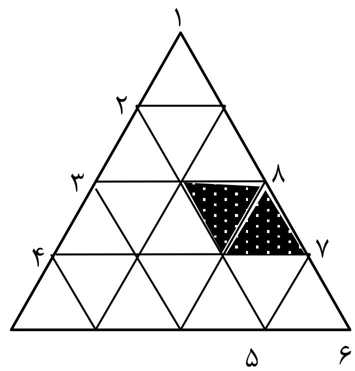
نشان دهید عدد اولی مانند p وجود دارد به‌طوری‌که $p \mid ۲^m - ۱$ ولی $p \nmid n$.

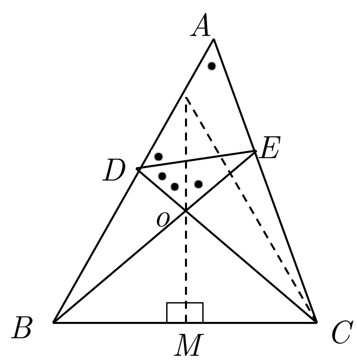
حل مسأله‌های مرحله دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور دی ماه ۱۳۷۳

۱- هر متوازی‌الاضلاع از برخورد دو زوج خط موازی به دست می‌آید و این خطها اضلاع مثلث را در ۷ یا ۸ نقطه قطع می‌کنند (زیرا ممکن است دو خط روی یک ضلع به هم برسند) در واقع دو ضلع دو نقطه تقاطع دارند و یک ضلع ۳ یا ۴ نقطه، لذا هر متوازی الاضلاع با انتخاب یک ضلع و ۳ یا ۴ نقطه روی آن مشخص می‌شود، چون روی هر ضلع $n+۱$ نقطه موجود است، داریم

$$\text{تعداد متوازی الاضلاع‌ها} = ۳ \times \left(\binom{n+۱}{۴} + \binom{n+۱}{۳} \right) = ۳ \times \binom{n+۲}{۴}$$







۲- عمود منصف BC را رسم می کنیم تا AB را در X قطع کند، آنگاه دو مثلث ODX و DOE برابرند (ز ض ز) و مثلث BOD متساوی الساقین است، پس اگر $BX = BE = k$ و $BC = a$ باشد، داریم

$$\angle BXC = ۳۶۰^\circ - ۶\alpha \Rightarrow \angle BCX = ۳\alpha - ۹۰^\circ$$

و

$$\angle BXC = ۵\alpha - ۱۸۰^\circ \quad \text{و} \quad \angle BCA = ۲۷۰^\circ - ۴\alpha$$

حال در مثلث BXC می‌گوییم

$$k < a \Rightarrow ۳\alpha - ۹۰^\circ < ۳۶۰^\circ - ۶\alpha \Rightarrow \alpha < ۵۰^\circ$$

و در مثلث EBC داریم

$$k < a \Rightarrow ۲۷۰^\circ - ۴\alpha < ۵\alpha - ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha > ۵۰^\circ$$

به همین ترتیب برای $k > a$ نیز تناقض مشابهی حاصل می‌شود، لذا زاویه α برابر ۵۰ درجه می‌شود.

۳- ادعا می‌کنیم f، تابعِ ثابت است.

$$f(1) = f(\frac{1+2}{3}) = f(1) + f(2)2 \Rightarrow f(1) = f(2)$$
$$f(2) = f(\frac{3+3}{3}) = \frac{f(3)+f(3)}{2} \Rightarrow f(2) = f(3)$$

فرض کنید

$$f(1) = f(2) = \ldots = f(3k)$$

پس

$$f(2) = f(k+1) = f(\frac{3k+1+2}{2}) = \frac{f(3k+1)+f(2)}{2} \Rightarrow f(3k+1) = f(2)$$
$$f(1) = f(k+1) = f(\frac{3k+2+1}{3}) = \frac{f(3k+2)+f(1)}{2} \Rightarrow f(3k+2) = f(1)$$
$$f(3) = f(k+2) = f(\frac{3k+3+3}{3}) = \frac{f(3k+3)+f(3)}{2} \Rightarrow f(3k+3) = f(3)$$

در نتیجه

$$f(1) = f(2) = f(3) = \ldots = f(3k) = f(3k+1) = f(3k+2) = f(3k+3)$$

پس f روی اعداد صحیح و مثبت ثابت است، اگر $x < 0$ آنگاه $-x+3 > 0$ پس

$$f(1) = f(\frac{x+(-x+3)}{3}) = \frac{f(x)+f(-x+3)}{2} = \frac{f(x)+f(1)}{2}$$

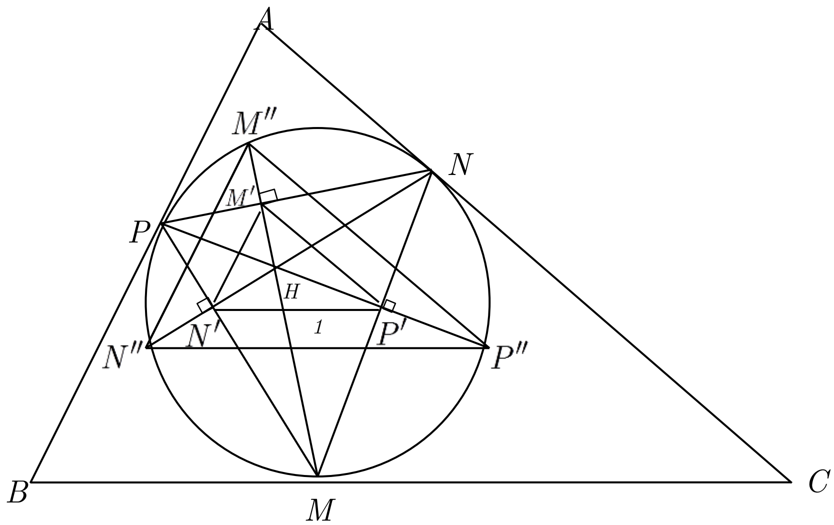
پس $f(x) = f(1)$ و f ثابت است.

۴- فرض کنید b_i تعداد تکرار رقم i ام باشد اگر b_j و b_i موجود باشند که

$$b_i \equiv b_j \not\equiv 0 \pmod 3$$

آنگاه تعریف می‌کنیم $f(j) = 8$ و $f(i) = 7$، این روند را روی بقیه ارقام ادامه می‌دهیم و به جای $f(i)$ و $f(j)$ به ترتیب ۴ و ۵، و ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم، بعد از اتمام این روند یا تعداد ارقام باقیمانـده کوچکتر یا مساوی ۴ است یا فقط یک a_k و یک a_l موجودند که $a_k \equiv 1$ و $a_l \equiv 2$. در حالت اول ارقام باقیمانده را با ۰، ۳، ۶ و ۹ جایگزین می‌کنیم و در حالت دوم k و l را با ۰ و ۳ جایگزین خواهیم کرد (در هر حالت رقم اول را با غیرصفر جایگزین می‌کنیم)، برقراری شرط‌های مسأله واضح است.

۵- $M'N'P'$ را مثلث ارتفاعی MNP می‌گیریم، به راحتی دیده می‌شود که اضلاع متناظر دو مثلث $M'N'P'$ و ABC موازیند، پس یک نقطه مانند G وجود دارد که دو مثلث با تجانس مرکزی نسبت به آن، به هم تبدیل می‌شوند.



پس مرکز دایره محاطی داخلی $P'N'M'$، I (مرکز دایره محاطی ABC) و G روی یک خط راست قرار دارند، یعنی H ، I و G روی یک خط هستند، همچنین مرکز دایره محیطی $M'N'P'$ ، G و O نیز روی یک خط واقعند، حال توجه می‌کنیم که دو مثلث $M'N'P'$ و $M''N''P''$ با تجانس به مرکز H به هم تبدیل می‌شوند. پس مرکز دایره محیطی $M'N'P'$ (مثلاً نقطه O')و مرکز دایره محیطی $M''N''P''$ (نقطه I)، و H روی یک خط واقع می‌شوند.

پس ثابت شد که G، I، H، O و O' روی یک خط قرار دارند.

۶- واضح است که $2^k \mid m$ ، پس خواهیم داشت :

$$2^m - 1 = t^{2k} - 1$$

که در آن $t > 3$ و t زوج است. حال داریم

$$2^m - 1 = t^{2k} - 1 = (t-1)\prod_{i=0}^{k-1}(t^{2^i} + 1)$$

یعنی $2^m - 1$ دارای $k+1$ عامل است که به شکل $t-1$ و $t^{2^i}+1$ هستند و دو به دو نسبت به هم اولند ولی n دارای k عامل اول است پس $\exists p$ و $p \mid 2^m - 1$ $P \dagger n$